MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA PCE UNEDASISS 2022

Parte 1 – Bloque test. Bloque de 10 preguntas. Debe elegir 10 de las 15 preguntas. Cada acierto suma 0,5 puntos. Cada error resta 0,1 puntos. Solo hay que una respuesta correcta por cada cuestión

Preguntas tipo test

1. **Para todo par A,B de matrices reales n x n arbitrarias:**

a) Se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

b) Se cumple que $A^2 – B^2 = (A + B)(A-B)$

c) Ninguna de las otras dos

2. **Para toda A matriz real 2 x 2 arbitraria, se cumple que:**

a) Si $A^2 = A$, entonces $A^4 = A$

b) Si A es simétrica, entonces $A^2 = A$

c) Ninguna de las otras dos

3. **Toda A matriz real arbitraria cumple:**

a) El rango de A es el número de filas no nulas

b) rango (A) = rango (-A)

c) Ninguna de las anteriores

4. **La matriz**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos a & sen\ a \\ -sen\ a & \cos a \end{pmatrix} \ \textbf{donde } a \epsilon \mathbb{R}$$

a) Tiene rango (A) = 1 para ciertos valores de α

b) Tiene rango (A) = 2 para todos los valores de α

c) Ninguna de las otras dos

5. **Consideremos los planos π: 2x + y + z = 1, π′: x + y - z = 0**

a) Su intersección es la recta 3x = 2y = 1

b) Su intersección es la recta r: (-1,2,1) + λ (-2,3,1)

c) Ninguna de las otras dos

6. Para todo par de vectores ortogonales u, v, si α es el ángulo que forma u y u – v, entonces se cumple que:

a) $\cos\alpha = \frac{\|u\|}{\|u\|^2 - \|v\|^2}$

b) $\cos^2\alpha = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 + \|v\|^2}$

c) Ninguna de las otras dos

7. La recta en el espacio cuya ecuación es

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

a) Pasa por el punto (3,1,0) y tiene vector director (-2,3,-1)

b) Pasa por el punto (-2,3,-1) y tiene vector director (-3,-1,1)

c) Ninguna de las otras dos

8. La distancia del punto P = (2,4,1) a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$

a) Menor que 1

b) Mayor que 1

c) Ninguna de las otras dos

9. Consideremos la curva definida por y = f(x). Entonces

a) Si la pendiente no está definida en algún punto de la curva, no existe la tangente en dicho punto

b) Si la tangente a la curva es horizontal en un punto (a, f(a)) y f es derivable en a, entonces f'(a) = 0

c) Ninguna de las otras dos

10. Para que el área de la región limitada por la curva y = $-x^2 + ax$ (donde a > 0) y el eje Ox tenga un valor de 36 unidades, debe ser:

a) a = 6

b) a = $3\sqrt{3}$

c) Ninguna de las otras dos

11. La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Tiene un máximo relativo en x = 0

b) Tiene un mínimo relativo en x = 0

c) Ninguna de las otras dos

12. El valor de la integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2022} \sin\left(\frac{x^3}{\cos x}\right) dx$$

a) Menor que 1

b) Múltiplo de π

c) Ninguna de las otras dos

13. Se tiene un conjunto de bolas azules y bolas rojas en una bolsa. En total hay 25 bolas. Se saca una de ellas al azar y se sabe que la probabilidad de que sea roja es p, mientras que la probabilidad de que sea azul es 4p. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

a) Menos de 21 y más de 15

b) Entre 5 y 10

c) Ninguna de las otras dos

14. Se lanza una moneda trucada. La probabilidad de que en dos lanzamientos se obtengan dos caras es de 0,16 ¿Cuál es la probabilidad p de obtener dos cruces?

a) $0,8 < p < 0,9$

b) $0,3 < p < 0,4$

c) Ninguna de las otras dos

15. ¿Cuáles de las siguientes probabilidades pueden representar a dos eventos disjuntos A y B de un determinado espacio muestral?

a) p(A) = 0,2 y p(B) = 0,67

b) p(A) = 0,5 y p(B) = 0,75

c) Ninguna de las otras dos.

Parte 2 – Bloque de desarrollo. Elija una de las dos opciones. Constará de 2 opciones con dos preguntas cada una. La calificación máxima de este bloque es de 5 puntos; 2,5 por cada pregunta.

Opción 1

1. Sea la matriz C = A^2 – 4A – 6B donde A = $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Estudie el rango de C en función del valor del número real a**

Calculamos la matriz C:

$$C = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{pmatrix}$$

Discutimos el rango mediante la realización de su determinante.

Este determinante lo podemos hacer mediante desarrollo de la segunda columna:

$$|C| = (-9) \cdot \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 \\ 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 \end{vmatrix}$$

Este determinante es igual a cero debido a que los columnas son iguales, por lo tanto el rango de la matriz C nunca es 3. Veamos cuando tiene rango 2, tomando los menores de orden 2, aunque en este caso todos dan el mismo resultado:

$$\begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18a^2 + 36a + 54 = 0$$

Es decir, todos los menores de orden 2 son iguales a cero cuando se cumpla la ecuación de segundo grado.

Esta ecuación de segundo grado se cumple para a = -1 y a = 3

Solución

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1,3\} \rightarrow r(C) = 2$$

$$Si\ a = \{-1,3\} \rightarrow\ r(C) = 1$$

2. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

a) (0,25 puntos) Determinar su dominio

b) (0,75 puntos) Determinar sus asíntotas

c) (0,75 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

d) (0,75 puntos) Calcular sus extremos relativos y dar un esbozo de su gráfica.

a) Al ser una función racional, identificamos en que valores se anula el denominador. Por lo tanto Dom f(x) = $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$

b) En primer lugar, determinamos las asíntotas verticales en x = -2 y x = 2

$$\begin{cases} \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \end{cases} \quad Por\ lo\ tanto, hay\ asíntota\ en\ x = -2$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \end{cases} \quad Por\ lo\ tanto, hay\ asíntota\ en\ x = 2$$

En segundo lugar, determinamos las asíntotas horizontales:

$$\begin{cases} \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \end{cases} \quad Por\ lo\ tanto, hay\ asíntota\ en\ y = 0$$

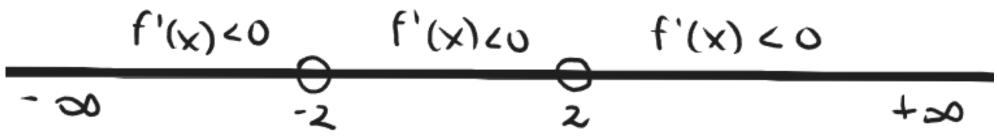
No hay asíntota oblicua al haber horizontal

c) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento realizamos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \to \quad -x^2-4 = 0 \quad \to x = \sqrt{-4}$$

No hay posibles máximos ni mínimos en los números reales

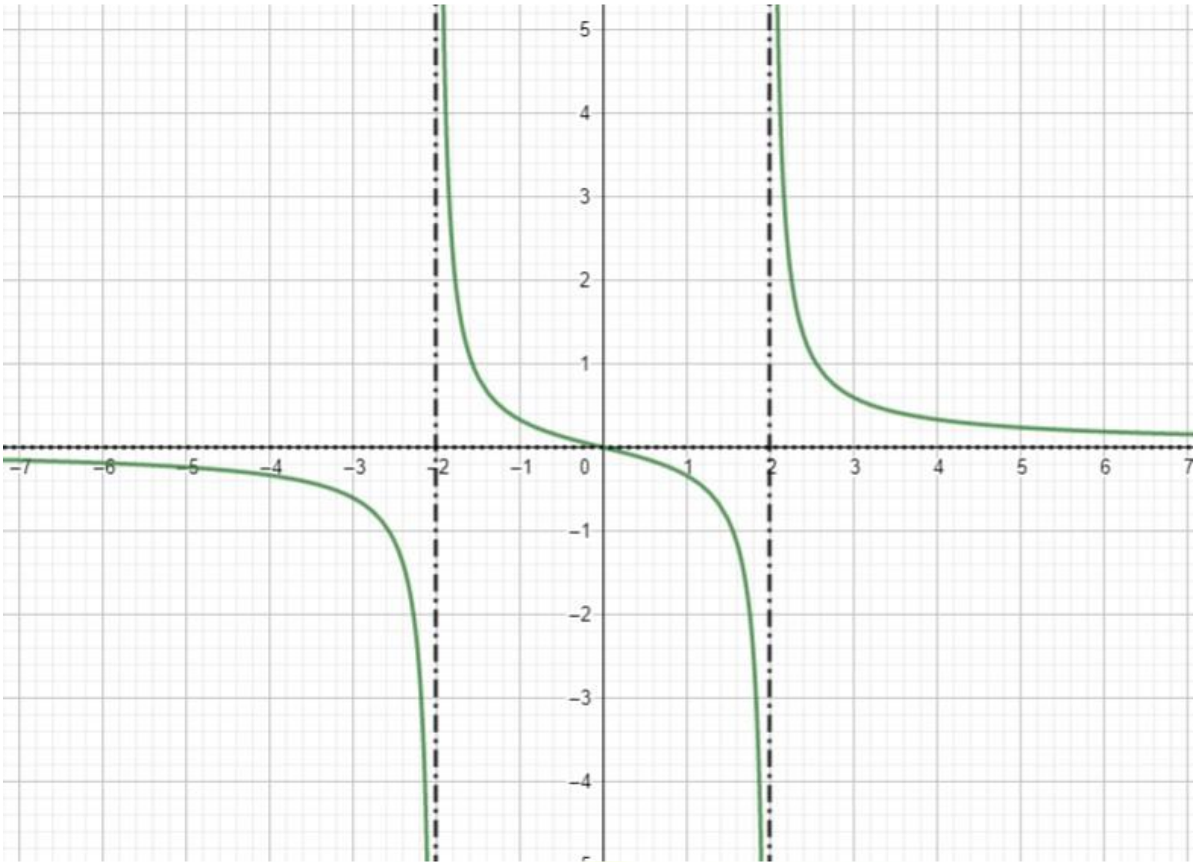
Al representar los valores fuera del dominio y analizar el valor de la derivada en los distintos tramos obtenemos:



Por lo tanto, la función decrece $(-\infty, -2)$ U $(-2,2)$ U $(2, +\infty)$

d) En el apartado anterior determinamos que no había extremos relativos puesto que la derivada no se anulaba en ningún valor real. Para esbozar la gráfica podemos utilizar las asíntotas y un valor entre los puntos fuera del dominio, por ejemplo, el corte con el eje X.

Corte en el eje x en (0,0)



La función se muestra en verde y las distintas asíntotas se muestran en negro con línea discontinua.

Opción 2

1. Hallar las integrales indefinidas siguientes:

a) (1 punto)

$$\int \boldsymbol{x e^{x^2}\, dx}$$

b) (1,5 puntos)

$$\int \boldsymbol{\sqrt{1-x^2}\, dx}$$

a) La integral es de inmediata:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

b) Resolvemos con el siguiente cambio de variable:

$$x = \sin(t) \qquad t = \arcsin(x) \qquad dx = \cos(t)\,dt$$

De esta manera sustituyendo en la integral original nos queda:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(t)\cdot\sqrt{1-\sin^2(t)}\,dt$$

Sabiendo que $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ nos queda:

$$\int \cos^2(t)\,dt \xrightarrow{\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}} \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos(2t)}{2}\,dt$$

La dos últimas integrales son inmediatas, siendo su resultado:

$$\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Si deshacemos el cambio de variable:

$$\frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(2\arcsin(x))}{4} + C$$

2. Se elige un número entero al azar entre 0 y 9999 (ambos incluidos). ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 y múltiplo de 5?

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que la probabilidad qué buscamos es la intersección entre la probabilidad de obtener un número mayor que 4444 y la probabilidad de que sea un múltiplo de 5, por lo tanto:

P (Mayor que 4444 ∩ Múltiplo de 5) = P (Mayor que 4444) · P (Múltiplo de 5)

Para encontrar la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 podemos usar la regla de Laplace, teniendo en cuenta que entre el 0 y el 9999 hay 10000 números, y que entre el 4444 y el 9999 hay 5555 números, por lo tanto:

$$P\ (Mayor\ de\ 4444) = \frac{nº\ casos\ favorables}{nº\ casos\ posibles} = \frac{5555}{10000}$$

Ahora para encontrar la probabilidad que sea un múltiplo de 5, podemos tener en cuenta que para cada 10 números encontramos 2 múltiplos de 5, de esta manera:

$$P\ (Múltiplo\ de\ 5) = \frac{nº\ casos\ favorables}{nº\ casos\ posibles} = \frac{2}{10}$$

Finalmente:

$$P\ (Mayor\ de\ 4444\ \cap Múltiplo\ de\ 5) = \frac{5555}{10000} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1111}{10000}$$